

Αναλ. Γ.

$$\sqrt{25/5/17}$$

Άσκηση

Να αναγνωρίσετε η επιφάνεια με εξίσωση:

$$\mathcal{S}(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3x + 2y = 0$$

Λύση: Θεωρώντας τη τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3x + 2y$$

ή ισοδύναμα $q(x, y, z) = x^{-t} A x$

όπου

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{και } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{αφ' } x^2 \text{ } \text{αφ' } xy \text{ } \text{αφ' } xz \\ \text{αφ' } y^2 \text{ } \text{αφ' } yz \text{ } \text{αφ' } z^2 \end{matrix}$$

πάλι αμφιμέτρως.

Πάω να βρω ιδιοτιμές από χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$$

Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή

$$\lambda_1 \text{ είναι } V(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / (A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ είναι βολών των } V(\lambda_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ είναι βάση του } V(\lambda_2) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\cancel{A - \lambda_3 I_3} \\ V(\lambda_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ βάση του } V(\lambda_3). \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Θεωρώ την ορθοκανονική δεξιόστροφη
 βάση $\vec{e}_1' = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2' = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$,
 $\vec{e}_3' = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Θεωρώ και τον πίνακα μεταβάσεως.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Αρα

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 = x' \vec{e}_1' + y' \vec{e}_2' + z' \vec{e}_3'$$

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$X = P X'$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} y' - \frac{1}{\sqrt{2}} z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{2}} z' \end{cases}$$

Γεγραμμένης μορφής:

$$2(x, y, z) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 =$$

$$(x')^2 - (y')^2 + 3(z')^2$$

$$3x + 2y = 3x' + \frac{2}{\sqrt{2}} y' - \frac{2}{\sqrt{2}} z' \Rightarrow 3x + 2y = 3x' + \sqrt{2} y' - \sqrt{2} z'$$

Συνεπώς, (5) $\Leftrightarrow (x')^2 - (y')^2 + 3(z')^2 + 3x' + \sqrt{2} y' - \sqrt{2} z' = 0 \Leftrightarrow$

$$((x')^2 + 3x') - ((y')^2 - \sqrt{2} y') + 3((z')^2 - \sqrt{2} z') = 0$$

$$\Leftrightarrow ((x')^2 + 2x' \cdot \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}) - ((y')^2 - 2y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{2}{4}) - (3((z')^2 - 2z' \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} + (\frac{\sqrt{2}}{6})^2 - \frac{2}{36})) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x' + \frac{3}{2})^2 - (y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 3(z' - \frac{\sqrt{2}}{6})^2 = 0$$

$$\begin{cases} x'' = x' + 3/2 \\ y'' = y' - \sqrt{2}/2 \\ z'' = z' - \sqrt{2}/6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Αν $(x'')^2 - (y'')^2 + 3(z'')^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ ελλειψαίος κύβος

$$(x'')^2 + 3(z'')^2 = (y'')^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x'')^2}{(y'')^2} - \frac{(y'')^2}{y''^2} + \frac{3(z'')^2}{y''^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \text{μιαόξυνο υπερβολαειδές}$$

Άσκηση: Να αναγνωρίσετε η ενεργότητα με $\in \mathbb{R}^3$ άνωθεν :

$$C(S) : \underbrace{x^2 - 2xy - 2xz + 4x - y + 2z - 1 = 0}$$

Λύση: Θεωρούμε τη τετραγωνική μορφή
 $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad q(x, y, z) = x^2 - 2xy - 2xz$
 $q(x, y, z) = x^T A x$ όπου

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{όπου } \begin{matrix} x^2 & xy & xz \\ y^2 & yz & z^2 \end{matrix}$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.
 ελέγχω $\nabla q = 0$ ορίζω από γνωμένο $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
 αν είναι $\neq 0$.

Με τη σειρά πάνω σε ιδιοτιμές

* Τα ιδιοδιανύσματα που θα βρω είναι οριζόντια
 να βρεθεί από 2 μεταβλ τους άρα δεν χρειάζεται
 να νάσω γραμμή αν ντάω μία δίνω
 ιδιοτιμή τότε θα είναι... *

$$V(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ βάση του } V(\lambda_1)$$

$$V(\lambda_2) = \left\{ x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ βάση του } V(\lambda_2)$$

η ενεργότητα
 άρα άνωθεν

$$V(\lambda_3) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ βάση του } V(\lambda_3)$$

Λέχουμε παραβάδατα του Πεδίου S

$$V(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$V(x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$V(x_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Θαυπά την ορθογώνια διαμόρφωση Πεδίου

$$\left\{ \vec{e}_1' = (0, 2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}), \vec{e}_2' = (2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}), \vec{e}_3' = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}) \right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Είναι ορθογ. και

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$q(x, y, z) = 0(x')^2 + 2(y')^2 - (z')^2 \quad X = P X'$$

$$(x, y, z) = x' \vec{e}_1' + y' \vec{e}_2' + z' \vec{e}_3' \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow 2(y')^2 - (z')^2 + \frac{5}{\sqrt{6}} y' + \frac{7}{\sqrt{6}} z' + \frac{\sqrt{2}}{2} x' - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(y' + \frac{5}{4\sqrt{6}}\right)^2}{\left(\frac{1}{12}\right)^2} - \frac{\left(z' + \frac{7}{2\sqrt{6}}\right)^2}{1^2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{50}{96} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(y' + \frac{5}{4\sqrt{6}}\right)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{\left(z' + \frac{7}{2\sqrt{6}}\right)^2}{1^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x' + \frac{100}{4\sqrt{6}}\right)$$

$$x'' = x' + \frac{100}{4\sqrt{6}}$$

$$y'' = y' + \frac{5}{4\sqrt{6}}$$

$$z'' = z' + \frac{7}{2\sqrt{6}}$$

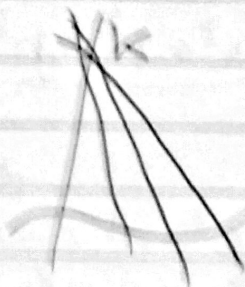
Άρα (s) $\Leftrightarrow$

$$\frac{(y'')^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{(z'')^2}{1^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} x'' \quad \text{Υπερβολικό Παραβολοειδές}$$

Κωνικές - Κυλινδρικές - Ευ. Περικοστροφές
Επιφάνειες

Ορισμός: Μία κυμμένη επιφάνεια είναι μία επιφάνεια που παράγεται από κινούμενη ευθεία η οποία πάντοτε διέρχεται από σταθ. σημείο K το οποίο καλείται κορυφή της επιφάνειας και τέμνει δοθείσα καμπύλη C του χώρου (C η καλείται οδηγός καμπύλη).

* (Μία καμπύλη στο χώρο περιγράφεται από 2 εξισώσεις) *



Κωνική Επιφάνειες στο

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή $K(0,0,1)$ και καμπύλη οδηγό (C) με εξισώσεις: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

Λύση:

Έστω (ϵ) γενέτιρα της επιφάνειας με εξισώσεις $(\epsilon) \quad \frac{x-0}{a} = \frac{y-0}{\beta} = \frac{z-1}{\gamma}$

Τα $\vec{a} = (a, \beta, \gamma) \neq \vec{0}$ είναι $\parallel (C)$.

Η (ϵ) τέμνει τη (C) , δηλαδή το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z-1}{\gamma} \\ x^2 + y^2 = 2, z = 0 \end{cases}$$

έχει λύση ως προς (x, y, z) .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = ta, y = t\beta, z = 1+t\gamma \\ x^2 + y^2 = 2, z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{\gamma}, x = -\frac{a}{\gamma}, y = -\frac{\beta}{\gamma} \\ z = 0, x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Βρίναι μια συνθήκη για να έχω επιφάνεια

$$\begin{cases} \left(-\frac{a}{\gamma}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = 2 \\ a^2 + \beta^2 = \gamma^2 \end{cases}$$

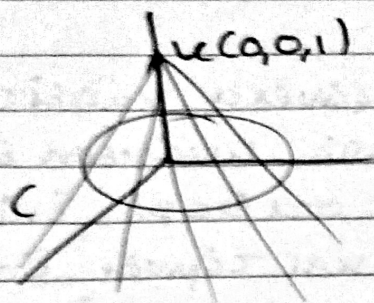
$$a^2 + \beta^2 = \gamma^2 \Leftrightarrow (ta)^2 + (t\beta)^2 = (t\gamma)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (z-1)^2$$

$\Leftrightarrow$

$$F(x, y, z-1)$$

$$F(u, v, z) = u^2 + v^2 - z^2$$

στη συνέχεια με επόμενο θ



Ορισμός: Μια συνάρτηση $f(u, v, t)$ καλείται ομογενής βαθμού k αν-ν ισχύει $\forall \lambda \geq 0, k \in \mathbb{R}$
 $f(\lambda u, \lambda v, \lambda t) = \lambda^k f(u, v, t)$.

Θεώρημα: Κάθε κυμνή επιφάνεια με κορυφή $K(x_0, y_0, z_0)$ έχει εξίσωση της μορφής $f(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$ (*)

όπου $f(u, v, t)$ είναι ομογενής συνάρτηση.
 Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής (*), όπου f είναι ομογενής συνάρτηση, παριστάει κυμνή επιφάνεια με κορυφή $K(x_0, y_0, z_0)$.

Παράδειγμα:

Τι παριστάει η εξίσωση

$$(x-2)^{2017} - 3(y-5)^{2017} = 2017(z-7)^{2017}$$

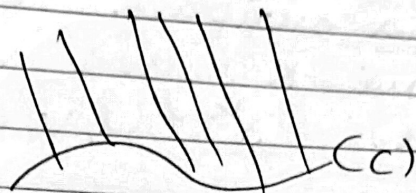
$$\Leftrightarrow f(x-2, y-5, z-7) = 0, f(u, v, t) = u^{2017} - 3v^{2017} - 2017t^{2017}$$

$$f(\lambda u, \lambda v, \lambda t) = \lambda^{2017} f(u, v, t)$$

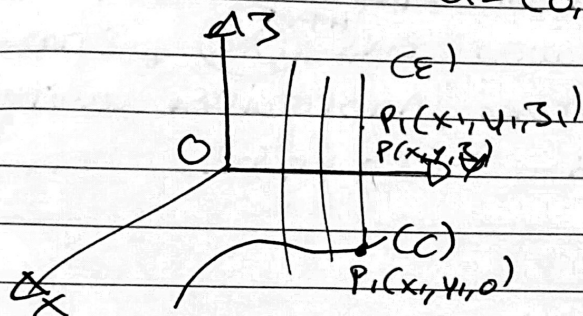
Κυμνή επιφάνεια με κορυφή $K(2, 5, 7)$

Διαφορά $\rightarrow$ Πάντα παράλληλες $\uparrow \downarrow$ ενώ κλίμακες ανακατατάσσονται

Ορισμός: Μια επιφάνεια καλείται κυβινδρική αν-ν παράγεται από κινούμενη ευθεία η οποία είναι προς σταθερό διάνυσμα $\vec{a} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ και τέμνει δοθείσα καμπύλη (c) (η οποία καλείται οδηγός καμπύλη).



Παράδειγμα:



$\vec{a} = (0, 0, 1)$ Έστω (E) τυχόντα γενέτιμρα της κυβινδρικής επιφάνειας

$$(E) \frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{1} \Leftrightarrow \text{Ανεξαρτη. παρά σταθερές}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση της κυβινδρικής επιφάνειας είναι $f(x, y) = 0$ και αντίστροφα

κάθε εξίσωση της μορφής $f(x, y) = 0$

παριστάει κυβινδρική επιφάνεια με γενέτιμρες επιφάνειες στα άξονα z .